Barem clasa a XII-a

Problema 1.

Verificarea axiomelor .(7p)

Problema 2.

a) Dacă f este endomorfim al grupului G, atunci $f(xy) = f(x)\,f(y)$, $\forall x, y \in G$.
Atunci $(xy)^2 = x^2y^2$, $\forall x, y \in G$, adică $xyxy = xxyy$, $\forall x, y \in G$. Simplificând la stânga prin x şi la dreapta
prin y obţinem $yx = xy$, $\forall x, y \in G$, deci $(G, \cdot)$ este grup abelian. **(2 puncte)**
Dacă $(G, \cdot)$ este grup abelian, atunci $\forall x, y \in G$ avem
$f(xy) = (xy)^2 = xyxy = xxyy = x^2y^2 = f(x)\,f(y)$, adică f este endomorfim al grupului G. **(1 punct)**
b) Fie $(G, \cdot)$ un grup comutativ cu $2n + 1$ elemente $(n \in \mathbb{N})$. Dacă e este elementul neutru al grupului, atunci $x^{2n+1} = e$, $\forall x \in G$. **(1 punct)**
Dacă $a, b \in G$ şi $f(a) = f(b) \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow a^{2n} = b^{2n}$. *Dar* $a^{2n+1} = b^{2n+1} \Rightarrow a^{2n}a = b^{2n}b \Rightarrow a = b$,
prin urmare f este injectivă. **(1 punct)**
Deoarece f este injectivă şi G este mulţime finită, rezultă că f este bijectivă. **(1 punct)**
Cum $(G, \cdot)$ este grup abelian, conform a) rezultă că f este endomorfim al grupului G.
În concluzie, f este automorfism al grupului G. **(1 punct)**

Problema 3.

Avem $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx} tg^{n-1}x\left(1 + tg^2x\right)dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx} tg^n x dx = I_1 + I_2$. Prima integrala devine prin integrare prin parti $I_1 = e^{nx}\left(\frac{1}{n} tg^n x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - I_2 = \frac{1}{n} e^{\frac{n\pi}{4}} - I_2\,(3p)$. De aici $nI_n = e^{\frac{n\pi}{4}}$ si limita de calculat se scrie $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{\pi}{4n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{4}(4p)$.

Problema 4

Pentru $x = y > 0$ obţinem $F(2x) \le 2F(x) \Rightarrow F(2x) - F(x) \le F(x)$. Din teorema lui Lagrange rezultă că există $c_x \in (x, 2x)$ astfel încât $x\,f(c_x) \le F(x)$. Deoarece f este crescătoare,
avem $f(x) \le f(c_x)$, deci $x\,f(x) \le F(x)$. În continuare deducem $\frac{xf(x) - F(x)}{x^2} \le 0$,

adica $\left(\frac{F(x)}{x}\right)' \le 0, \forall x \in (0,\infty)$ de unde rezulta ca functia $\frac{F(x)}{x}$

este descrescătoare pe $(0,\infty)$. **(4 puncte)**

Cum *f* este crescătoare rezultă că *F* este convexă şi cum $F(0) = 0$ deducem că funcţia $\frac{F(x)}{x}$ este crescătoare pe $(0,\infty)$, prin urmare $\frac{F(x)}{x}$ este constanta pe $(0,\infty)$.

Avem $F(x) = kx \Rightarrow f(x) = k$, $\forall x \in (0,\infty)$. Cum *f* are primitive rezultă că *f* are proprietatea lui Darboux, deci $f(x) = k, \forall x \in [0,\infty)$. (3puncte)

A doua soluţie. Deoarece *f* are primitive rezultă că *f* are proprietatea lui Darboux şi cum *f* este monotonă deducem că *f* este continuă. Atunci $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. (1p)

Fie $x, y \in [0,\infty)$ .Inegalitatea din enunt se poate scrie

$$F(x+y) - F(x) \le F(y) \Rightarrow \int_x^{x+y} f(t)dt \le \int_0^y f(t)dt.$$

Cu schimbarea de variabila u=t-x avem $\int_x^{x+y} f(t)dt = \int_0^y f(x+u)du$ si inegalitatea precedent devine

$$\int_0^y (f(t+x) - f(t))dt \le 0. \textbf{(2p)}$$

Dar *f* crescătoare şi $t \le t + x$ implică $f(t+x) - f(t) \ge 0, \forall t \in [0, y]$, deci $\int_0^y (f(t+x) - f(t))dt \ge 0.$ **(2 puncte)**

Atunci $\int_0^y (f(t+x) - f(t))dt = 0$ şi cum funcţia de sub integrală este continuă şi pozitivă, rezultă că $f(t+x) - f(t) = 0, \forall t \in [0, y]$. Pentru $t = 0$ obţinem $f(x) = f(0)$ şi cum *x* a fost ales arbitrar, deduce ca f este functia constanta.

Se verifică imediat că funcţiile constante verifică cerinţele problemei. **(2 puncte)**